UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Universitaria de
Ingeniería Técnica Industrial

POLITÉCNICA

Sistemas discretos realimentados

DR. BASIL M. AL HADITHI

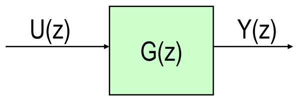
Sistemas discretos realimentados

- Errores en régimen permanente
- Técnica del lugar de las raíces

Precisión de sistemas

- En cadena abierta

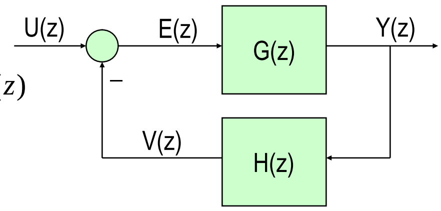
$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z)$$



- En cadena cerrada

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) =$$

$$= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}U(z)$$



ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Tipo de un sistema

- **Tipo de un sistema** en bucle abierto: número de polos del sistema en el punto z=1

$$G(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)^r\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$$

$$r \geq 0$$

Señales de prueba

- Secuencia escalón

$$u_{0k} = \begin{cases} 0 & k<0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \quad U_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

- Secuencia rampa

$$u_k = kT\, u_{0k} \quad U_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

- Secuencia parábola

$$u_k = \frac{1}{2}(kT)^2\, u_{0k} \quad U_0(z) = \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

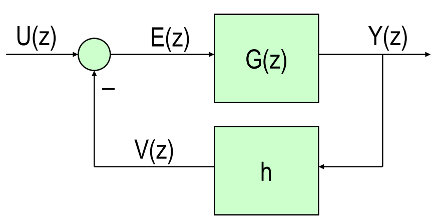
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Error con realimentación constante

- La señal de error coincide con el error entrada/salida

$$\varepsilon(z) = E(z) = U(z) - hY(z) = U(z) - h\frac{G(z)}{1+hG(z)}U(z) =$$

$$= \frac{1}{1+hG(z)}U(z)$$



Error de posición

- Error entrada/salida en régimen permanente cuando la entrada es un escalón unitario. En sistemas estables se calcula
  - Constante de posición

$$e_p = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+hG(z)}\frac{1}{(1-z^{-1})} = \frac{1}{1+K_p}$$

  - Depende del tipo

$$K_p = \lim_{z\to 1} hG(z)$$

Tipo	K_p	e_p
0	$\lim_{z\to 1} hG(z)$	$\frac{1}{1+K_p}$
1	∞	0
2	∞	0

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Error de velocidad

- Error entrada/salida en régimen permanente cuando la entrada es una rampa unitaria. En sistemas estables se calcula
  - Constante de velocidad

$$e_v = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+hG(z)}\frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{K_v}$$

  - Depende del tipo

$$K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)hG(z)$$

Tipo	K_v	e_v
0	0	∞
1	$\lim_{z\to 1}(z-1)hG(z)$	$\frac{T}{K_v}$
2	∞	0

Error de aceleración

- Error entrada/salida en régimen permanente cuando la entrada es una parábola unitaria. En sistemas estables se calcula
  - Constante de aceleración

$$e_a = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+hG(z)}\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T^2}{K_a}$$

  - Depende del tipo

$$K_a = \lim_{z\to 1}(z-1)^2 hG(z)$$

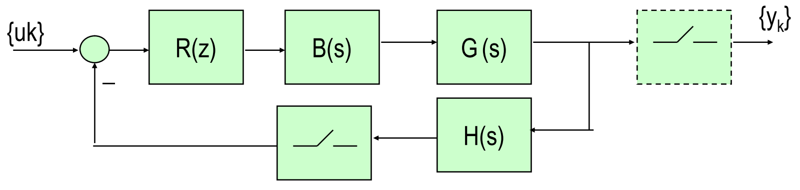
Tipo	K_a	e_a
0	0	∞
1	0	∞
2	$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 hG(z)$	$\frac{T^2}{K_a}$

Tabla resumen

Tipo	e_p	e_v	e_a
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{T}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$

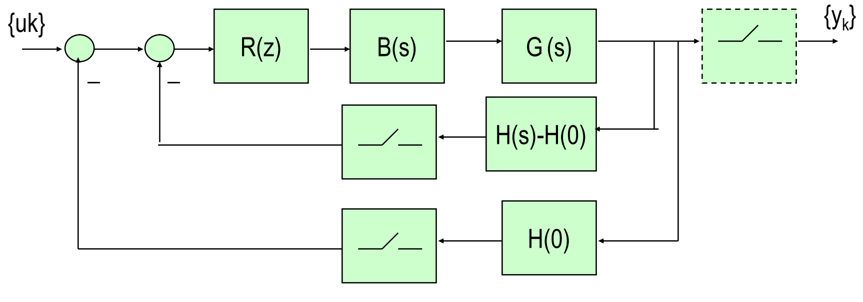
Error con realimentación no constante

- Como en el caso continuo, hay que buscar un sistema equivalente con realimentación constante

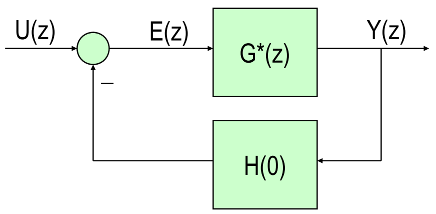


ESCUELA UNIVERSITARIA DE
INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Error con realimentación no constante

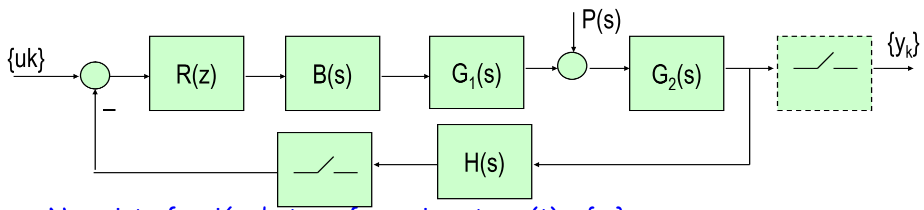


Error con realimentación no constante



$$G^*(z) = \frac{R(z)Z[B(s)G(s)]}{1 + R(z)Z[B(s)G(s)H(s)] - H(0)R(z)Z[B(s)G(s)]}$$

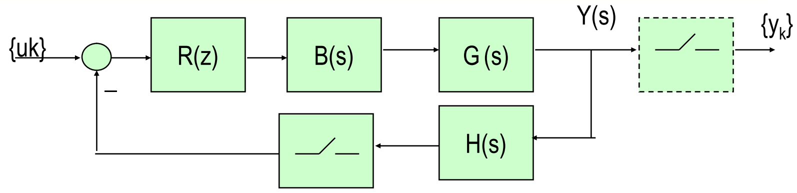
Errores ante perturbaciones



- No existe función de transferencia entre p(t) e $\{y_k\}$
- Los errores de seguimiento dependen únicamente del tipo de R(z) o de $G_1(s)$

Tipo R(z) o $G_1(s)$	$P(s) = 1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$
0	finito	∞	∞
1	0	finito	∞
2	0	0	finito

Lugar de las raíces



- El mismo objetiva: conocer el comportamiento del sistema realimentado mediante la localización de los polos del sistema

$$M(z) = \frac{R(z)Z\left[B(s)G(s)\right]}{1 + R(z)Z\left[B(s)G(s)H(s)\right]}$$

- Los polos serán las soluciones del sistema

$$1 + R(z)Z\left[B(s)G(s)H(s)\right] = 1 + K\frac{\sum_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\sum_{i=1}^{n}(z - p_i)}$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE
INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Lugar de las raíces

- El polinomio característico será por tanto

$$p(z) = \sum_{i=1}^{n}(z - p_i) + K\sum_{i=1}^{m}(z - z_i)$$

- Al tener la misma estructura que en el caso continuo, **son válidas todas las reglas** vistas entonces